Concours général 2015, problème 3
Moyennes prévisionnelles

Voici une petite merveille de problème sur les suites numériques. D'habitude, une suite est définie par récurrence en exprimant chaque terme à partir de ses précédents. Dans ce contexte, chaque terme est défini à partir de ses suivants, situation insolite qui ne manque pas de piquant(s).

Il est conseillé de s'imprégner d'abord du sujet par soi-même (ce serait dommage de passer à côté de cette phase) sans consulter les « pistes de résolution » proposées ici. Rien ne dit d'ailleurs que ces « pistes » soient les meilleures, ni même les bonnes.

1. Le sujet

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n\in N^*}=(u_1,\, u_2,...)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est de type $\mathcal{M}$ si, pour tout $n\in \mathbf{N}^*$ u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire : $u_n=\dfrac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}}{n}$

1. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n-C)_{n\in N^*}$?

2. Montrer que toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.

3. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n=a\,n^2+b\,n+c$ pour tout $n\in \mathbf{N}^*$. Montrer que $a=b=0$.

4. L'objectif de cette question **4** est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathcal{M}$ est constante. Dans les questions **4.1** et **4.2**, on suppose que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite de type M à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r\in \mathbf{N}^*$

4.1. Soit p un entier tel que $p>r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q<p\le q'\le 2q$ et $u_{q'}\le u_q\le u_r$. En déduire que $u_p\le 3u_r$

4.2. Pour tout $p\in \mathbf{N}^*$ montrer que $u_p\le 3u_r$.

Dans les questions **4.3** et **4.4**, on suppose que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite minorée de type $\mathcal{M}$.

4.3. Soit D un réel strictement positif et soit $p\in \mathbf{N}^*$. Montrer que si u_p-D n'est pas un minorant de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ alors $u_p-\dfrac{3D}{2}$ n'est pas non plus un minorant.

4.4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est constante.

4.5. Conclure.

5. Existe-t-il une suite non constante de type $\mathcal{M}$?

2. Quelques pistes de résolution

2. On peut tenter de montrer que toute suite croissante non constante n’est pas de type $\mathcal{M}$.

3. Considérer les termes de rangs 1 et 2.

4. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$.

Pour tout entier *n*, u_n est la moyenne arithmétique des *n* termes suivants.
Une remarque plusieurs fois utile dans le problème est que parmi ces termes (ceux de rangs $n+1$ à $2n$ donc), il y en a au moins un qui est inférieur ou égal à u_n et aussi au moins un qui est supérieur ou égal à u_n.

4.2. Si $q'=p$, alors $u_p \leq u_r$

Sinon : $u_p = \dfrac{u_{p+1}+\ldots+u_{2p}}{p} < \dfrac{u_{p+1}+\ldots+u_{2p}}{q}$ puisque $q<p$

Or : $u_{p+1}+\ldots+u_{2p} \leq \left(u_{q+1}+\ldots+u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{q'}\right)+\left(u_{q'+1}+\ldots u_{2p}+\ldots+u_{2q'}\right)$ puisque la suite est à terme positifs ou nuls et que tous les termes du premier membre figurent dans le second.
…

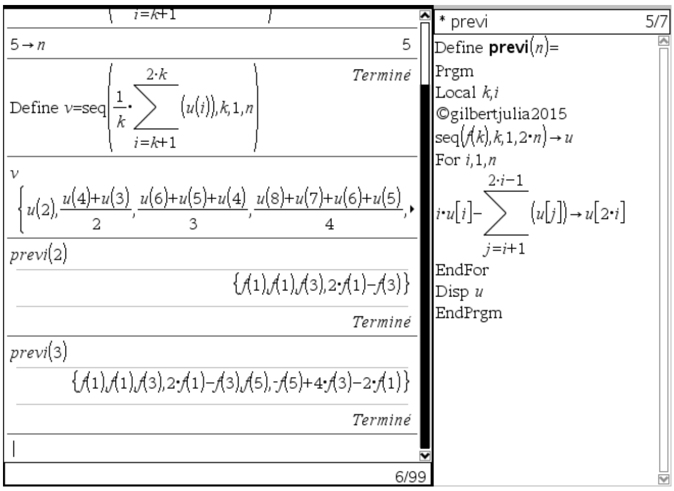
Il reste ensuite à établir l’inégalité $u_p \leq 3u_r$ dans le cas où $p<r$
On peut supposer qu’il existe un entier $p<r$ tel que $u_p > 3u_r$ et construire de proche en proche une suite d’indices strictement croissante (q_i) tels que : $q_i+1 \leq q_{i+1} \leq 2q_i$ et $u_{q_{i+1}} \geq u_{q_i} \geq u_p$ jusqu’à en trouver un qui contredit la conclusion précédente.

4.3. Je serais plutôt tenté de montrer que, si $u_p - D$ est un minorant de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ (avec $D>0$), alors $u_p - \dfrac{2D}{3}$ en est aussi un. Considérer pour cela la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N^*}$, $v_n = u_n - (u_p - D)$.

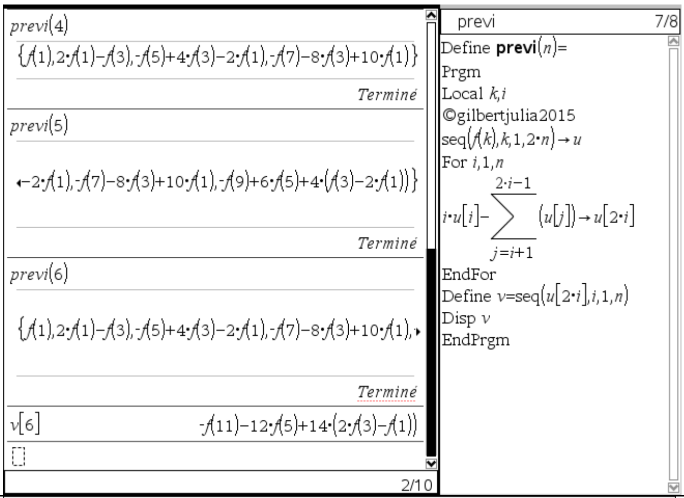
5. Essayer de construire terme après terme une suite de type $\mathcal{M}$:
$u_2 = u_1$; $u_4 = 2u_2 - u_3 = 2u_1 - u_3$; $u_6 = 3u_3 - u_5 - u_4 = 3u_3 - u_5 - (2u_1 - u_3) = -u_5 + 4u_3 - 2u_1$.
$u_8 = 4u_4 - (u_5 + u_6 + u_7) = 4(2u_1 - u_3) - (u_5 + (-u_5 + 4u_3 - 2u_1) + u_7) = -u_7 - 8u_3 + 10u_1$

Il semble qu’il soit possible de bâtir une suite de $\mathcal{M}$ telle que ses termes pairs s’expriment en fonction de ses termes impairs.

La programmation de ce processus de construction conforte cette hypothèse



En ne faisant afficher que les termes de rang pair, on apprend que : $u_{10} = -u_9 + 6u_5 + 4u_3 - 2u_1$. On obtient de même : $u_{12} = -u_{11} - 12u_5 + 28u_3 - 14u_1$



Histoire de voir ce qu'il se passe, on choisit d'abord pour fonction f deux fonctions constantes, ce qui revient à attribuer aux termes impair les valeurs : $u_{2p+1} = 2015$, puis $u_{2p+1} = 66$.

Sont affichés les termes de rang pair, jusqu'au 20ème dans un cas, jusqu'au 24ème dans l'autre. Rien ne bouge …

Evidemment, l'intérêt est de choisir au contraire des fonctions f non constantes. Ce choix est laissé au lecteur …