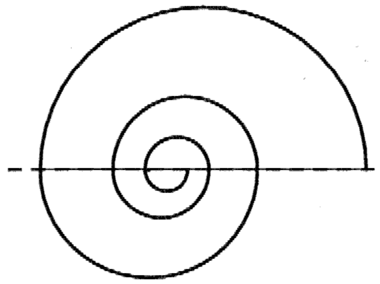
# ESD 2016_3c01 : Suites

*Sujet à rapprocher du sujet ESD2015_07. La formulation de l'énoncé et la nature des travaux d'élèves sont différentes d'un sujet à l'autre. Il me semble toutefois que l'exercice de 2015 est mieux posé et plus intéressant que celui-ci.*

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

Une spirale est formée par une succession de demi-cercles dont le rayon de l'un est égal aux deux tiers du rayon précédent. On suppose que le rayon du premier demi cercle est 2 cm. Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $L_n$ la longueur de la spirale obtenue par la succession de $n$ demi cercles.



1. Exprimer la longueur $L_n$ en fonction de l'entier $n$.
2. Existe-t-il un entier $n_0$ à partir duquel $L_n \geq 5\pi$ ?
3. On augmente le nombre de demi cercles. Que devient la longueur totale de la spirale obtenue ?

### B. Les réponses proposées par deux élèves de terminale S à la question 2

**Elève 1.**

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $L_n$ |
| 2 | 1 | 6,2831853072 |
| 3 | 2 | 10,4719755120 |
| 4 | 3 | 13,2645023152 |
| 5 | 4 | 15,1261868506 |
| 6 | 5 | 16,3673098743 |
| 7 | 6 | 17,1947252234 |
| 8 | 7 | 17,7463354561 |
| 9 | 8 | 18,1140756112 |
| 10 | 9 | 18,3592357147 |
| 11 | 10 | 18,5226757836 |

A l'aide d'un tableur, j'ai déterminé la valeur de l'entier $n$.
J'en déduis qu'à partir de $n=5$, $L_n \geq 5\pi$

**Elève 2.**

Je résous l'équation :

$$6\pi\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=5\pi \Longleftrightarrow 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow n=\frac{-2\ln 2}{\ln 2-\ln 3}$$

J'en déduis qu'à partir de $n=4$, $L_n \geq 5\pi$

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les acquis et les erreurs éventuelles.

**2.** Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

**3.** Proposez deux ou trois exercices sur le thème *suites* en explicitant pour chacun d'eux les différents objectifs pédagogiques visés.

## 2. Eléments de correction

L'un des sujets posés en 2015 concernait une étude de spirale construite à l'aide de segments formant une ligne brisée. Voici cette année une spirale formée de portions de cercles raccordées. Il s'agit ici plutôt d'un exercice d'application de la notion de « somme des termes » d'une suite géométrique, notion certainement déjà vue au préalable, compte tenu de la tournure de l'énoncé.

Les productions d'élèves fournies sont peu significatives. On ne dispose pas d'éléments suffisants pour apprécier avec pertinence ces travaux. Il faudra faire avec …

**1. Analyse des travaux d'élèves.**

**Bougnègue.**
Réponse recevable à la question 2, mais manquant d'une justification claire (on peut donc la considérer comme incomplète).

Bougnègue[1] a su aujourd'hui tabuler la suite des longueurs jusqu'à son terme d'indice 11, indice suffisant pour repérer le rang à partir duquel la longueur de la spirale est supérieure à $5\pi$.

Malheureusement, on n'a aucune indication sur sa méthode de tabulation.
Le seul acquis que l'on peut relever avec certitude dans sa production est « savoir tabuler les termes d'une suite ».

Cette tabulation ne permettra pas à Bougnègue de résoudre la question 3. Il faudrait lui demander par quel moyen il a construit son tableau de valeurs. Il est regrettable que le jury n'ait pas cru bon de livrer cette information. S'il a écrit une relation de récurrence puis « tiré vers le bas », alors il lui reste à reconnaître la nature de la suite des longueurs. S'il a reconnu la nature géométrique de cette suite et utilisé des formules liées à cette nature, alors il faudrait lui faire expliciter les formules utilisées.

Sa réponse est incomplète car il faudrait que Bougnègue justifie son choix $n_0 = 5$ en séparant les valeurs $L_4$ et $L_5$ du nombre réel $5\pi$, c'est-à-dire propose deux nombres $s$ et $t$ tels que : $L_4 \leq s < 5\pi < t \leq L_5$

[1] Un « Bougnègue » rappelle à peu près un Robert Bidochon. Il apparaît dans les blagues locales pour représenter un personnage un peu beauf. On l'utilise aussi pour désigner un importun.

**Elève 2.**
Réponse incorrecte à la question 2. Cependant, ce que l'on voit de la production de cet élève pourrait lui permettre de répondre correctement à la question 3.

Cet élève a en effet reconnu et appliqué la formule condensée donnant la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique (savoir).

Il sait d'autre part résoudre une équation de la forme $a^x = b$ en choisissant une transformation adéquate, en l'occurrence l'utilisation du logarithme népérien $x \ln a = \ln b$ (savoir faire)

On relève deux erreurs :

- Une erreur mineure d'indexation. Cet élève n'a pas tenu compte de la définition de $L_n$ donnée par l'énoncé, la longueur du premier demi cercle est pour cet élève $L_0$, conformément sans doute à la formule usuelle du cours $u_0 + ... + u_n = ....$ C'est pourquoi sa réponse est $n_0 = 4$ et non $n_0 = 5$.
- Une erreur de raisonnement. Cet élève confond équation et inéquation. De ce fait, l'élève prend quelque liberté avec le sens du symbole d'équivalence[2] (la dernière utilisation de ce symbole lorsqu'il aboutit à $n = \dfrac{-2\ln 2}{\ln 2 - \ln 3}$ est, pour lui, un simple connecteur signalant une transformation d'écriture). Sa conclusion n'est pas cohérente avec sa démarche.

La tabulation faite par l'élève 1 pourrait servir à mettre en évidence cette confusion, en montrant que la suite $(L_n)$ est strictement croissante ; il y a des termes strictement inférieurs à $5\pi$ et d'autres strictement supérieurs, mais aucun exactement égal à ce nombre.

**2.** La production de l'élève 1 peut être gardée pour valider la réponse à la question 2 et pour émettre des conjectures en ce qui concerne la réponse à la question 3 (la longueur de la spirale devient-elle infinie ? A-t-elle une limite finie ? Dans ce dernier cas, peut-être que cette limite est 20 ? …)

Dans la correction, il est important de bien identifier la traduction mathématique des trois hypothèses de l'énoncé. L'énoncé utilise en particulier le mot « succession », il appartient aux élèves de traduire mathématiquement ce mot en faisant référence à une suite numérique :

- L'hypothèse : « le rayon du premier demi cercle est 2 cm » initialise la construction
- L'hypothèse : « le rayon de l'un (demi cercle) est égal aux deux tiers du rayon précédent » établit une relation de récurrence entre les longueurs de demi cercles consécutifs (ce qui nous fait penser à une *suite* de demi cercles). Cette relation de récurrence induit un caractère de suite géométrique liée au problème.
- L'hypothèse : « spirale formée par une succession de demi-cercles » fait penser à une somme des longueurs des demi cercles (donc à la somme des termes d'une suite)

Il reste à définir rigoureusement la suite géométrique $(d_n)_{n\in N^*}$ des longueurs des demi cercles et à prêter une attention particulière à l'indexation. Ainsi $d_1 = 2\pi$ et si $d_n$ est le rayon du *n*-ième demi cercle ($n \geq 1$) alors :

$$d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times (2\pi).$$

---

[2] L'erreur de cet élève devrait être corrigée devant toute la classe : « Qu'est-ce qui ne va pas dans ce raisonnement ? ». Outre la distinction entre équation et inéquation, il est au moins aussi important que tous les élèves prennent conscience qu'un symbole d'équivalence est lourd de sens et que son emploi nécessite que l'on s'interroge sur sa pertinence.
De la façon dont la question est posée, on cherche un entier $n_0$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow L_n \geq 5\pi$ (implication directe). En revanche si on cherche *le plus petit* entier $n_0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow L_n \geq 5\pi$, il y aura peut-être équivalence …

Une expression « satisfaisante » de $L_n$ est : $L_n = 2\pi\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\pi\left(1+\frac{2}{3}+...+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$.

Cette expression convient pour résoudre dans d'assez bonnes conditions la question 2. La production de l'élève 1 en fait foi.

C'est cependant le moment de se tourner vers l'élève 2 qui a proposé une expression condensée de cette longueur, nettement plus satisfaisante et seule performante pour résoudre la question 3. On fait rappeler à cette occasion l'expression condensée de $1+q+...+q^{n-1}$.

On obtient : $L_n \underset{gjulia2016}{=} 2\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\pi\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 6\pi\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Les questions 2 et 3 peuvent désormais être abordées dans de meilleures conditions.

En question 2 : $L_n \geq 5\pi \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{6}$ puis $L_n \geq 5\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 6}{\ln 3 - \ln 2}$ . (Justifier, dans les diverses transformations d'écriture, le sens des inégalités)

L'encadrement (donné par une calculatrice) $4 < \frac{\ln 6}{\ln 3 - \ln 2} \underset{gjulia2016}{<} 5$ permet de conclure que $n_0 = 5$ .

Relever au passage le décalage d'indexation entre l'indexation correcte et celle de l'élève 2.

En question 3, justifier le résultat $\lim_{n\to+\infty} L_n = 6\pi$

## 3. Commentaire

La question « Existe-t-il un entier $n_0$ à partir duquel $L_n \geq 5\pi$ » arrive ici un peu comme un cheveu sur la soupe. Pourquoi au fait $L_n \geq 5\pi$ ?

Il paraît clair que le professeur de terminale S voulait amener les élèves à résoudre une inéquation de la forme $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq A$

Le sujet aurait peut-être gagné en pertinence en inversant l'ordre des deux questions 2 et 3.

Cette inversion aurait pour avantage de mettre l'élève 1 plus tôt en face de ses responsabilités (il aurait peut-être conclu que la longueur « avait tendance à stationner » mais pas davantage, l'utilisation d'un tableur trouvait vite ses limites).

Elle aurait aussi justifié pourquoi il y avait quelque raison de chercher un entier $n_0$ à partir duquel $L_n \geq 5\pi$ .

On pourrait suggérer d'en chercher un autre à partir duquel $L_n \geq 5{,}9\,\pi$ par exemple.