

ESD 2016_16 : Géométrie dans l'espace

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Dans un tétraèdre $ABCD$, I , J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.

Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.

Démontrer que les points I , E , F et K sont coplanaires.

B. Les réponses de trois élèves

Elève 1

Il est clair que $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est un repère de l'espace. Dans ce repère, on a $I\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$,

$K\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$, $F\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $E\left(0 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$. J'en déduis $\overrightarrow{IE}\left(0 ; \frac{1}{3} ; -\frac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{FK}\left(\frac{1}{6} ; -\frac{1}{3} ; 0\right)$. Je calcule

$x'y' - y'x' = -\frac{1}{18}$; $x'y' - y'x'$ n'est pas nul donc (IE) et (FK) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes et

donc coplanaires. I , E , F et K sont bien coplanaires.

Elève 2

J'ai tracé une figure. Sur la figure, j'ai tracé (IE) et (FK) . Elles sont sécantes.

Elève 3

$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'après le théorème des milieux.

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

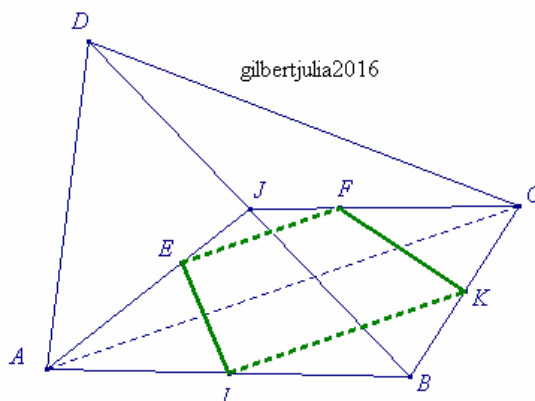
Je vois sur la figure que $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ mais je n'arrive pas à le montrer.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production des trois élèves en mettant en évidence les outils utilisés et les erreurs éventuelles.
2. En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
3. Proposez deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace* en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

2. Eléments de correction

Voici un exercice basique de géométrie dans l'espace en classe de terminale scientifique portant sur la coplanarité de quatre points. L'énoncé est fermé (montrez que ...) et les données de l'exercice sont exprimées soit à l'aide de configurations (milieux) soit à l'aide de l'outil vectoriel (relations vectorielles).



1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1.

Réponse incorrecte.

Cet élève a changé de cadre pour représenter la situation, il utilise l'outil de la géométrie analytique pour traiter l'exercice.

Le repère qu'il choisit est compétitif et les coordonnées des quatre points considérés sont correctes (on aimerait quelques explications sur les coordonnées de E et F qui ne découlent pas immédiatement des données).

Il utilise un critère correct mais ambigu pour justifier la non colinéarité de $\overrightarrow{IE}\left(0; \frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right)$ et

$\overrightarrow{FK}\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 0\right)$. En effet, deux vecteurs de l'espace, de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') sont non

colinéaires si et seulement un au moins des trois déterminants extraits est non nul. Ici, l'élève a retenu le premier déterminant extrait, ce qu'il a le droit de faire, mais on ne sait pas s'il fait réellement la distinction entre le critère de non colinéarité de vecteurs dans l'espace et le critère de non colinéarité dans le plan.

Ses réussites s'arrêtent ici, car il utilise désormais le théorème élève incorrect « Deux droites non parallèles de l'espace sont nécessairement des droites sécantes » vu dans un autre sujet cette année.

Puisqu'il a choisi de s'intéresser aux droites (IE) et (FK) , on va respecter son choix et lui conseiller de déterminer des équations paramétriques de ces deux droites pour obtenir, le cas échéant, leur point d'intersection (il y a des chances qu'il le trouve et que le résultat le surprenne « agréablement »). Mais cela ne va pas remettre en cause sa fausse représentation et risque au contraire de la conforter. Il faudra, pour une remise en cause de sa fausse représentation, confronter cet élève à une autre situation de droites non coplanaires où il ne trouvera pas de point d'intersection.

Elève 2.

Aucun « outil » de résolution.

Cet élève raisonne sur la figure qu'il a sous les yeux et n'a pas la capacité de « voir dans l'espace ». Selon lui, si les projections parallèles sur un plan de deux objets de l'espace ont une intersection non vide, alors ces deux objets eux-mêmes ont une intersection non vide.

Il faut le convaincre qu'un constat sur une figure n'a pas valeur de preuve (mais s'il n'en est pas convaincu quand il arrive en terminale il y a peu de chances qu'on réussisse à le convaincre maintenant ; en principe, il s'agit là d'un chantier travaillé depuis la classe de sixième ...).

On peut lui demander si deux arêtes opposées d'un tétraèdre comme (AC) et (BD) sont des droites sécantes. S'il pense que oui, proposer une figure faite avec un logiciel de géométrie dans l'espace : comment se fait-il que leur supposé « point d'intersection » tantôt existe tantôt non et quand il « existe », change de place au gré des points de vue ? Cette objection peut d'ailleurs aussi être proposée à l'élève 1.

Elève 3.

Démarche intéressante mais inaboutie.

Cet élève a utilisé l'outil vectoriel, dans le même cadre que celui des données vectorielles de l'énoncé. Il a bien compris la situation et s'est engagé dans une démarche prometteuse (montrer la colinéarité de \overrightarrow{FE} , \overrightarrow{IK} , \overrightarrow{AC}).

Il a correctement justifié que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ gilbertjulia mais a échoué pour exprimer \overrightarrow{FE} . Cet élève a tenté d'utiliser la relation de Chasles mais n'a pas trouvé de point intermédiaire performant pour décomposer \overrightarrow{FE} en somme de deux vecteurs.

Il semble qu'il soit parti de la fausse intuition que l'un ou l'autre des vecteurs $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AJ}$ ou $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CJ}$ donnés dans l'énoncé devait intervenir dans la décomposition (effet de contrat didactique : « si on me donne ces égalités, c'est que je dois les utiliser »)

On peut lui conseiller de persévérer dans la voie qu'il a choisie : il a mobilisé quatre des cinq points de la figure qui appartiennent au plan (ACE) ; s'il n'en gi reste qu'un, ce sera peut-être celui-là ...

On peut aussi lui conseiller d'exprimer une relation vectorielle positionnant E par rapport à J plutôt que par rapport à A et de procéder de même pour F . Cet élève doit comprendre qu'une relation telle que par exemple

gjulia $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AJ}$ en induit une autre entre \overrightarrow{JE} et \overrightarrow{JA} .

Au bilan des réussites de cet élève, on peut citer la démarche pertinente et le fait qu'il est parfaitement conscient de ce qu'il cherche à obtenir et de la raison de son échec.

2. Une correction de l'exercice.

Si on s'appuie sur les productions des élèves 1 et 3, on va devoir d'une part prouver analytiquement comme l'élève 1 que (IE) et (FK) sont sécantes (à l'aide de deux systèmes d'équations paramétriques dont on prouve la compatibilité ou bien en identifiant quel est un point commun aux deux droites, peut-être l'élève 2 a une idée à ce propos) et d'autre part comme l'élève 3 prouver le parallélisme de (EF) et (IK) .

On disposera ainsi de deux arguments différents prouvant que I, K, E, F sont dans un même plan :

- Les droites (IE) et (FK) passent toutes les deux par D . Elles sont sécantes et les quatre points I, E, F, K sont coplanaires dans le plan passant par D, I , et K .
- Les droites (EF) et (IK) sont deux droites parallèles car toutes deux parallèles à (AC) . Les points E, F, I, K sont tous dans le plan passant par I et par E et parallèle à (AC) .

Ceci dit, le choix très particulier du coefficient $\frac{2}{3}$ met une autre puce à l'oreille : vu leurs positions sur les médianes $[AJ]$ et $[CJ]$, les points E et F sont les centres de gravité respectifs des triangles ABD et BCD . Le point E appartient à la médiane issue de D du triangle ABD et le point F appartient à la médiane issue de D gi du triangle CBD . Le

Le droites (IE) et (FK) se coupent en D et les points E, F, I, K sont coplanaires dans le plan (DIK) .

Cette solution opportuniste, exploitant l'outil des configurations, semble nettement plus simple que les deux solutions envisagées, l'analytique ou la vectorielle. Il ne faut pas compter sur cet exercice pour promouvoir l'un ou l'autre de ces outils.