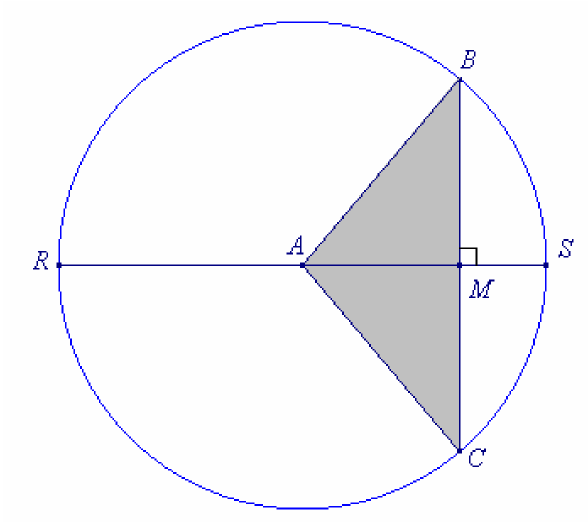
ESD 2016_11 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On considère le cercle Γ de centre A et de diamètre $[RS]$ avec $RS = 2$. Pour tout point M de $[AS]$, on trace la perpendiculaire en M à (AS) qui coupe le cercle Γ en B et C.

Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale ?



B. Les réponses proposées par trois élèves de première S

Elève 1

On note x la longueur AM on a $BC = 2x$. J'en déduis l'aire du triangle ABC qui vaut $\frac{x \times 2x}{2} = x^2$. Donc l'aire du triangle ABC est maximale lorsque x^2 est le plus grand possible c'est-à-dire lorsque $x = 1$ quand le point M est en S

Elève 2

Le triangle AMB est rectangle en M donc d'après Pythagore $AB^2 = AM^2 + MB^2$. Donc $MB^2 = AM^2 - AB^2 = x^2 - 1$. J'en déduis que $MB = \sqrt{x^2 - 1}$. Je note $f(x)$ l'aire cherchée, on a : $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2}$. J'ai tracé la courbe de la fonction sur ma calculatrice mais cela n'a rien donné.

Elève 3

Je note $\theta = \widehat{MAB}$ et $f(\theta)$ l'aire du triangle ABC. On a $f(\theta) = \frac{AM.BC}{2} = \cos\theta \sin\theta$

Comme $-1 \le \cos\theta \le 1$ et $-1 \le \sin\theta \le 1$ on a $f(\theta) \le 2$

Il existe donc bien une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale, cette aire vaut 2.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation* dont l'un au moins devra illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.

2. Eléments de correction

Voici un exercice classique d'optimisation issu du domaine de la géométrie. Cet exercice s'apparente au problème de maximisation de l'aire d'un losange dont le périmètre est fixé. On sait que parmi les losanges de périmètre donné, le carré est celui qui a la plus grande aire. On devrait retrouver en filigrane ce résultat ici.
On note que l'énoncé pose la question de l'existence d'un maximum et ne demande pas pour autant la détermination de cet éventuel maximum.

Ce sujet se prête bien à la comparaison de deux modélisations différentes d'une même situation.

1. Analyse des travaux d'élèves.
Les trois élèves tentent de modéliser la situation à l'aide d'une fonction. Les deux premiers élèves ne donnent pas une réponse correcte, tandis que la réponse de l'élève 3, certes incomplète, ouvre une perspective intéressante.

	Elève 1	**Elève 2**	**Elève 3**
Choix du paramètre décrivant la situation	Longueur AM, explicitement.	Longueur AM, implicitement	Angle $\theta = \widehat{MAB}$
Intervalle auquel appartient ce paramètre	Non	Non	Non
Calcul des paramètres utiles	Raisonne strictement sur la figure de l'énoncé dans laquelle le triangle AMB paraît être rectangle isocèle. L'hypothèse fausse $AM = MB$ est rajoutée aux données.	Justification correcte du calcul de MB mais erreur de signe dans le calcul effectué.	Corrects. Identifie que AM et MB sont des fonctions trigonométriques du paramètre choisi.
Fonction objectif	Incorrecte	Incorrecte, en raison de l'erreur de calcul (semble de plus considérer le triangle AMB et non ABC)	Correcte
Traitement mathématique	Inutile compte tenu de la fonction objectif obtenue, conclusion cohérente avec la fonction obtenue.	Représentation graphique inaboutie en raison de l'erreur de signe rédhibitoire.	Majoration de la fonction objectif (incorrecte : « un majorant d'un produit est la somme des majorants » selon lui.). Cherche à prouver l'existence d'un optimum sans forcément le déterminer, conformément à la consigne.
Remédiation	Utiliser une figure dynamique pour faire voir que l'hypothèse $AM = MB$ ne résiste pas à la déformation	Proposer de déterminer l'intervalle auquel appartient x et de vérifier le signe de $x^2 - 1$ dans cet intervalle.	Proposer de déterminer l'intervalle auquel appartient θ et étudier le signe des fonctions trigonométriques sur cet intervalle. Proposer ensuite d'utiliser une formule trigonométrique pour exprimer autrement l'aire.

2. Une correction de l'exercice.
On s'appuie sur les productions des élèves 2 et 3 en comparant les choix des paramètres servant à décrire la situation. Préciser dans chaque cas l'intervalle fermé borné auquel appartient le paramètre choisi.

On obtient deux fonctions objectifs : $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ à étudier sur l'intervalle $[0\ ;1]$ ou bien $g(\theta)=\sin\theta\cos\theta$ à étudier sur l'intervalle $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$

On distingue la conjecture de l'existence d'un maximum et la détermination de ce maximum.

Le théorème concernant une fonction continue sur un intervalle fermé borné (utilisé implicitement par l'élève 3) n'est pas connu des élèves de première. Il n'est pas interdit de commenter intuitivement cette situation : les fonctions f et g devraient certainement « atteindre leurs bornes » mais faute d'un théorème justifiant formellement cette propriété cela reste du domaine de la conjecture (voir commentaire).

On va donc étudier les variations des deux fonctions …
L'étude de f nécessite le recours à la dérivation alors que pour l'étude de g, la formule trigonométrique $g(\theta)=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ permet de s'en passer.
L'aire du triangle est maximale lorsque ABC est un triangle rectangle isocèle.

En conclusion, on insistera sur le choix du paramètre décrivant la situation (au moins deux paramètres possibles) et on décrira les différentes étapes de la démarche menant à l'optimisation que l'on retrouve quel que soit le paramètre choisi. Seul le traitement mathématique diffère, la balance penchant ici sensiblement pour le choix θ.

3. Commentaires

C1. Le triangle ABC apparaît comme étant un demi losange, losange dont le périmètre serait fixe et égal à 4. Le lecteur trouvera sans trop de peine dans de nombreux manuels la maximisation de l'aire d'un losange à périmètre constant. Cet exercice n'en est qu'une des variantes.

C2. Il peut être intéressant de reprendre et compléter le raisonnement de l'élève 3, en montrant aux élèves, de façon intuitive car on sort du cadre du programme, d'une part dans quelle mesure un encadrement de la fonction f répond à la question et d'autre part d'où provient le fait que f est une fonction bornée. En effet :

- La fonction f est définie sur un segment $[a\ ;\ b]$.
- Elle est continue sur ce segment.

Le théorème de Weierstrass s'applique : l'image par f du segment $[a\ ;\ b]$ est un segment, la fonction f est bornée et atteint ses bornes.

La continuité sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel f est définie, des fonctions sinus et cosinus justifie une réponse affirmative à la question posée. Autrement dit, de la façon dont l'énoncé est formulé (existe-t-il …), l'exercice est un coup de pied dans une porte ouverte. C'est la *détermination* du maximum qui pose problème.