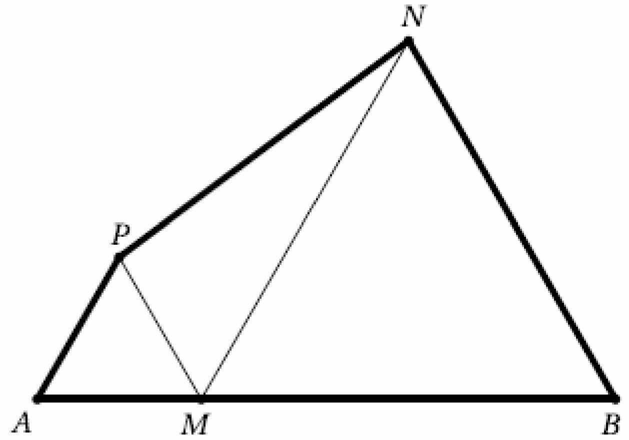
ESD 2016_07 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Soient un segment [*AB*] de longueur 10 cm et *M* un point de [*AB*] distinct de *A* et de *B*. Du même côté de la droite (*AB*), on construit deux triangles équilatéraux *AMP* et *MBN*.

Déterminer la position du point *M* pour laquelle l'aire du quadrilatère *ABNP* est minimale.



B. Les réponses proposées par deux élèves de première S

Elève 1.

En faisant la figure avec un logiciel de géométrie dynamique et en déplaçant le point M sur le segment [AB] on s'aperçoit que la figure est symétrique.
Par conséquent, l'aire de ABNP est minimale lorsque M est le milieu de [AB] c'est-à-dire $AM = 5\ cm$.

Elève 2.

J'ai fait une figure et j'ai trouvé que les aires de AMP et MNB sont $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ *et* $\frac{(10-x)^2\sqrt{3}}{4}$. *En revanche, je ne vois comment on peut faire pour calculer l'aire de MPN car le triangle n'est pas un triangle particulier. Du coup, je ne vois pas comment on peut faire. Mais je pense que l'aire est minimale si on prend pour M le milieu de [AB]. J'ai fait plusieurs essais à la main et c'est pour cette position que j'ai trouvé l'aire minimale.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les réponses de chaque élève en mettant en évidence ses réussites, les et ses éventuelles erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents dont un au collège, un au lycée. . Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

La configuration présentée dans ce sujet est assez classique. On considère un segment [AB], un point M situé sur ce segment et deux figures simples de même nature (triangles équilatéraux, carrés) de bases respectives [AM] et [MB].

La question étudiée le plus fréquemment est de maximiser la somme des aires des deux figures.

Dans le cas présent, il s'agit de minimiser l'aire d'un quadrilatère. Cette variante rend la modélisation de la situation plus difficile. L'évaluation de l'aire du quadrilatère constitue un sérieux obstacle, que l'élève 2 par exemple n'a pas réussi à surmonter.

Quoi qu'il en soit, le problème sous-jacent à celui-ci est la maximisation du produit de deux nombres réels dont la somme S est fixée (voir commentaire). On sait que cette maximisation a lieu lorsque ces deux réels sont égaux à $\frac{S}{2}$. Ceci n'a pas échappé aux deux élèves qui émettent tous deux cette idée.

1. Analyse des travaux d'élèves.
Chouquerouste.
À son habitude, Chouquerouste a dégainé son logiciel de géométrie dynamique et a expérimenté. Il n'était pas aujourd'hui au sommet de sa forme car, bizarrement, il ne semble pas avoir fait afficher l'aire du quadrilatère par son logiciel.

Il s'est cependant « aperçu » d'une symétrie de la figure. Effectivement, la position M' symétrique de M par rapport au milieu de [AB] génère un quadrilatère symétrique, donc de même aire. Il justifie par cet argument le fait que le milieu de [AB] génère le quadrilatère d'aire minimale. En l'état, il s'agit d'une conjecture. À son habitude, Chouquerouste a donc expérimenté et son expérimentation l'amène à conjecturer la réponse correcte mais il a été incapable de passer à un stade de mathématisation de la situation.
C'est le conseil que l'on peut lui donner.

Elève 2.
Cet élève tente de modéliser la situation par une fonction. On comprend qu'il a posé $AM = x$ et il exprime correctement en fonction de x les aires des deux triangles équilatéraux. Il échoue à exprimer l'aire du triangle NMP qui lui paraît être totalement quelconque. Il a parfaitement conscience de la cause de son échec.
Il a la capacité de changer de stratégie et de procéder à quelques essais qui l'amènent à émettre une conjecture exacte.

On peut conseiller à cet élève d'abord de préciser l'intervalle auquel appartient x et ensuite de persévérer dans la voie qu'il a choisie : le triangle MNP n'est pas totalement quelconque, il devrait s'intéresser à son angle de sommet M. Dispose-t-on d'une formule permettant d'exprimer l'aire d'un triangle dont on connaît la mesure d'un angle et la longueur des côtés de ce même angle ?

2. Correction de l'exercice.
Il n'y a pas d'inconvénient à présenter une figure construite avec un logiciel de géométrie dynamique, par exemple celle de Chouquerouste. On *conjecture* que l'aire du quadrilatère est minimale quand M est milieu de $[AB]$. Mais il faut le démontrer …

Pour cela, la démarche de l'élève 2 est reprise. On identifie sa variable maître x, en précisant que x appartient à l'intervalle $]0\,;10[$. Il faut exprimer l'aire du quadrilatère en fonction de x et, pour cela, déterminer l'aire du triangle MNP que l'élève 2 n'a pas obtenue. On s'intéresse à l'angle de sommet M puis à l'expression de l'aire d'un triangle dont on connaît un angle et les côtés adjacents à cet angle.

Ce qui amène à minimiser la fonction polynôme du second degré : $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+(10-x)^2+x(10-x)\right)$ …

Ce qu'on fait faire aux élèves soit avec l'outil de la dérivation, soit ave les techniques spécifiques au second degré.

3. Voir REDCM pages 146 à 149.

3. Commentaires

1. Sachant que la fonction aire est une fonction polynôme du second degré, l'argument de l'élève 1 « puisqu'il y a symétrie de la figure, l'optimisation se fait au milieu du segment » devient pertinent. S'il y avait un minimum en un point autre que le milieu du segment, il y aurait un autre point symétrique par rapport à ce milieu ayant la même propriété, la fonction aire serait minimale pour deux valeurs distinctes c et $10-c$, ce qui n'est pas le cas pour une fonction du second degré.

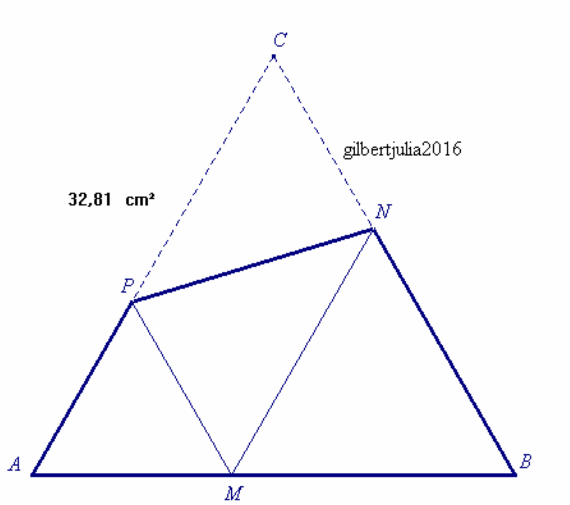
2. Il semble qu'il n'y ait pas vraiment d'intérêt à s'intéresser à l'aire du quadrilatère $ABNP$ plutôt qu'à la somme des aires des deux triangles équilatéraux. L'obstacle créé par le calcul de l'aire de MNP fait barrage à la réussite d'une modélisation par une fonction, la production de l'élève 2 en témoigne, alors même que l'optimisation se produit pour une position de M évidente. On ne gagne rien au change.

Il y aurait pourtant un avantage …

Un examen plus attentif de la figure dynamique fait apparaître autre chose que la conjecture « optimisation pour M milieu du segment » :

Il apparaît que N et P se déplacent chacun sur un côté d'un triangle équilatéral ABC de côté 10.

De plus, le quadrilatère $MNCP$ est un parallélogramme, propriété que l'on peut justifier de plusieurs façons (par exemple en disant que les droites (MP) et (NC) sont parallèles car elles déterminent avec (AC) des angles correspondants de même mesure 60 degrés et que, de même, (MN) et (PC) sont parallèles.)



L'aire du quadrilatère peut dès lors se calculer de deux façons : ou bien c'est la somme des aires de trois triangles dont MNP comme l'a dit l'élève 2, ou bien c'est l'aire du triangle ABC diminuée de l'aire du triangle CNP. L'aire du quadrilatère est minimale quand l'aire du triangle CPN est maximale.

Certes, on ne coupe pas au calcul de l'aire de l'un des deux triangles isométriques, CPN ou MNP, mais on a maintenant l'opportunité de reformuler le problème posé.

L'aire de chacun des deux triangles CPN ou MNP est $\frac{1}{2}\times x\times(10-x)\times\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{4}x(10-x)$

- L'élève 2 doit minimiser $A(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+(10-x)^2+x(10-x)\right)$
- La reformulation du problème amène à maximiser gjulia2016 $B(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(10-x)$, c'est-à-dire finalement le produit de deux réels de somme 10.

L'écran ci-contre résume les principaux résultats utiles, suivant que l'on considère l'aire du quadrilatère ou bien l'aire du triangle *CNP*.

Define $a(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(x^2+(10-x)^2+x\cdot(10-x)\right)}{4}\|0<x<10$	*Terminé*
Define $b(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot x\cdot(10-x)}{4}\|0<x<10$	*Terminé*
©gilbertjulia2016	
$a(x)+b(x)$	$25\cdot\sqrt{3}$
$\dfrac{d}{dx}(a(x))$	$\dfrac{\sqrt{3}\cdot(x-5)}{2}$
$\dfrac{d}{dx}(b(x))$	$\dfrac{-\sqrt{3}\cdot(x-5)}{2}$
$a(5)$	$\dfrac{75\cdot\sqrt{3}}{4}$
$b(5)$	$\dfrac{25\cdot\sqrt{3}}{4}$
	8/99

L'apprentissage visé est alors, outre résoudre un problème gj d'optimisation, d'inciter les élèves à :

- Extraire le maximum d'informations d'une figure dynamique, repérer des régularités, identifier des lieux géométriques, « voir » quelles propriétés résistent à la déformation, émettre plusieurs conjectures.
- Effectuer des inférences (c'est-à-dire ici voir autre chose que l'objet géométrique auquel l'énoncé fait référence, savoir sortir du cadre strict du problème posé, être capable de le reformuler).