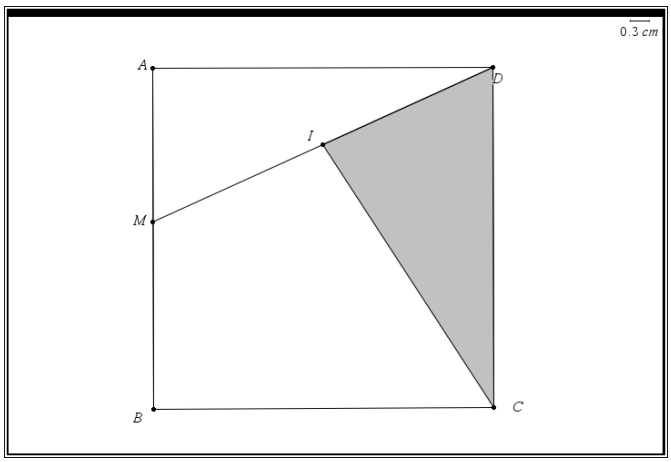
ESD 2016_05 : Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

ABCD est un carré de côté 5 cm.
M est un point du segment [*AB*].
I est le milieu du segment [*DM*].

Existe-t-il une position de *M* pour laquelle l'aire du triangle *DCI* est minimale ?



B. Extrait des programmes de mathématiques du collège

À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Précisez en quoi l'exercice proposé permet de prendre conscience des différentes composantes de l'activité mathématique décrites dans le préambule des programmes du collège.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de quatrième.

3. En motivant vos choix, proposez trois exercices sur le thème *conjecture et démonstration* dont un au moins au niveau lycée.

2. Préambule

Nous voici aujourd'hui confrontés au pompeux « préambule » des programmes du collège, recueil de vertueuses tartarinades.

Certes, la « véritable[1] activité mathématique » décrite ici et dont nous devrons chanter les louanges est très séduisante.

Encore faut-il qu'il y ait de quoi s'activer. Or, le contenu des programmes ne propose désormais guère plus de mathématiques que la recette des croquettes pour chats. Les futurs enseignants doivent se faire une raison : les élèves qu'ils auront en face d'eux n'auront aucune culture mathématique consistante, et le programme qu'ils auront à appliquer ne leur permettra pas d'en jeter la moindre des bases solides. Aussi, les intentions citées dans ce préambule resteront lettre morte, duperie destinée aux élèves et à leurs parents, faute de contenu permettant de les mettre en œuvre de façon pertinente.

Transportons-nous cependant au pays des Bisounours où une majorité d'élèves a suffisamment d'acquis mathématiques pour s'engager avec profit dans un « apprentissage progressif de la démonstration » et soyons prêts à nous plonger dans l'hypocrisie manifeste qu'exige le traitement de ce sujet….

3. Eléments de correction

L'exercice proposé est destiné essentiellement à alimenter une activité de recherche. Son énoncé est ouvert et, de la façon dont la question est posée, la réponse va avoir un côté inattendu. Délibérément, il va provoquer une rupture du contrat didactique usuel (« puisqu'on me demande s'il existe une position de *M* rendant minimale l'aire du triangle, c'est qu'il y en a une quelque part » selon ce contrat).

On note que le choix des composants de la figure brouille les pistes. Le fait que *ABCD* soit un carré n'est pas indispensable pour obtenir un résultat identique, l'important est que (*AB*) soit parallèle à (*CD*). Ce fait particularise la situation et a l'avantage d'agrandir l'éventail des démarches possibles. Les élèves peuvent, s'ils le veulent, démontrer que le triangle a une aire constante, mais aussi exprimer l'aire de ce triangle en fonction de celle $_{gj}$ du carré.

1. Compatibilité avec les instructions ministérielles.

Cette compatibilité dépend d'une part de ce que l'enseignant compte faire de cet exercice et d'autre part de ce qu'il est en mesure d'atteindre compte tenu de la culture mathématique de ses élèves. Disons que ce dernier a (avait ?) un certain potentiel …

« *Modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration* » : cet exercice ne propose pas grand-chose à « modéliser », en revanche il s'agira de construire une démonstration du fait observé $_{gj}$. Ce qui justifie son classement en « conjecture et démonstration »

« *Identifier et formuler un problème* » : tel est en effet l'intention principale de l'exercice. La question posée initialement étant « existe-t-il un triangle d'aire minimale », les élèves seront amenés à une remise en cause du résultat escompté et à reformuler la question en : « montrer que l'aire du triangle est toujours la même » $_{gj}$.

« *Conjecturer un résultat* » : l'enseignant attend probablement l'une ou l'autre des trois conjectures spontanées : « le triangle a une aire minimale quand *M* est en *A* », ou bien « en *B* » ou bien « au milieu $_{gj}$ de [*AB*] ».

[1] Ce qualificatif de « véritable » est révélateur. Y aurait-il donc de « fausses » activités ? Comme dans les publicités de poudre à lessive (exigez le véritable blanc…), ce qui est autoproclamé « véritable » ne l'est pas nécessairement.

« *Contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence* » : c'est à l'enseignant de gérer ce contrôle. L'objectif est que les élèves se rendent compte que les conjectures ci-dessus sont peut-être inexactes, puisque toutes donnent des triangles de même aire, et fassent émerger une nouvelle conjecture, différente de ce que suggère la question $_{gj}$ posée.

« *Bâtir une argumentation, mettre en forme une solution* » : ce n'est pas spécifique à cet exercice, mais inhérent à l'activité mathématique en général.

Bref, un excellent entraînement à la langue de bois.

2. Correction de l'exercice.

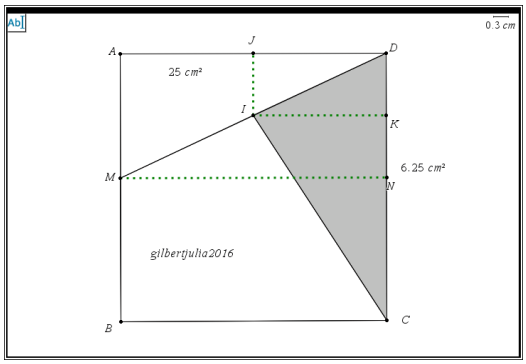
La question du jury est « telle que vous *l'exposeriez* devant une classe de quatrième ». Elle sous-entend que cette correction serait purement magistrale, ce qui est quelque peu en contradiction avec l'esprit de l'exercice. Ce type d'exercice se prête au contraire à la mise en œuvre d'une « démarche d'investigation ».

Ce qui suppose :

- Une première phase de recherche initiale destinée à favoriser l'appropriation du problème et à l'émission de premières $_{gj}$ conjectures (voir ci-dessus).
- Une deuxième phase destinée à tester ces conjectures et à évaluer leur validité. C'est au cours de cette phase que devrait émerger la conjecture qu'il est possible que l'aire du triangle ne varie pas. Il appartient à l'enseignant de recueillir les formulations des élèves à propos de cette conjecture et de la reformuler : « l'aire du triangle est indépendante de la position de *M* sur [*AB*] », ou bien : « quelle que soit la position de *M* sur le segment [*AB*], l'aire du triangle est toujours la même » (une occasion de faire connaissance avec le quantificateur universel). Cette aire semble toujours être égale au quart de l'aire $_{gj}$ du carré.
- Une troisième phase destinée à rechercher des éléments de preuve de cette conjecture : « pour quelle raison l'aire du triangle serait-elle toujours la même ? ». On peut remonter au fait que peut-être « la hauteur issue de *I* de ce triangle a toujours la même longueur ». On incite les élèves à compléter la figure par des constructions auxiliaires qui pourraient apparaître utiles (déjà le pied *K* de la hauteur issue de *I* et peut-être aussi le projeté orthogonal *N* de *M* sur (*CD*)). Une autre piste est d'établir des partitions du carré en morceaux de même aire. On invite les élèves à proposer de toute façon une démonstration rédigée.

C'est à ce moment que la « correction » proprement dite intervient.

Il y aurait pour mémoire d'intéressants éléments de preuve liés aux théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle :



N est le projeté orthogonal de *M* sur (*CD*). *K* est le milieu de [*DN*].

- Les points *I* et *K* étant les milieux de deux des côtés du triangle *DMN*, d'après le théorème des milieux, (*IK*) est parallèle au troisième côté (*MN*) de ce triangle et de plus $_{gj\,2016}$ $IK = \frac{1}{2}MN$.
- La droite (*IK*) étant parallèle à (*MN*), elle est perpendiculaire à (*CD*). Il s'agit de la hauteur issue de *I* du triangle *ICD*.
- Le quadrilatère *AMND* est un rectangle car il a trois angles droits. Donc : $MN = AD_{gjulia\,2016}$ et il en résulte

que $IK = \frac{1}{2}AD$. La hauteur issue de I a toujours la même longueur.

- L'aire du triangle est toujours égale à : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD\right)\times CD_{gjulia} = \frac{1}{4}\left(AD\times CD\right)$

Mais pour mémoire seulement, puisque le « théorème des milieux » ne figure plus au programme ...

D'autres pistes de résolution $_{gj}$ sont cependant envisageables :

Le point I appartient toujours à la parallèle à (AB) passant par le milieu de [AD]. Si on décide d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, c'est certainement la remarque la plus apparente. Comment le démontrer ?

Des considérations d'aires liées au partage d'un triangle par une médiane : (CI) est une médiane de CDM donc partage ce triangle en deux triangles de même aire. L'aire de CDI est égale à la moitié de l'aire de CDM. Mais CDM est la réunion de deux demi rectangles DMN et CNM dont l'aire cumulée est égale à la moitié de l'aire du carré.

En conclusion, on fera remarquer qu'une figure géométrique est « vivante » en ce sens qu'il est souvent utile de la compléter par des constructions auxiliaires (ne pas avoir une attitude contemplative …). On mettra éventuellement en valeur le fait que plusieurs démarches différentes aboutissent au même résultat.

4. Commentaire

Il est clair que, dans cette activité, la question de l'utilisation d'un logiciel de géométrie se pose. Il est certain que le jury attend du candidat une $_{gj}$ telle utilisation. Mais à quel moment ?

On peut proposer de l'utiliser dès l'appropriation du problème. Les instructions ministérielles nous y incitent d'ailleurs avec insistance. Cependant, il me semble qu'alors la constance de l'aire du triangle apparaît trop tôt dans l'activité, comme une évidence.

Il me paraît plus pertinent que les élèves fassent d'abord une figure sur papier et émettent leurs conjectures, on l'espère contradictoires, pour pouvoir instaurer un débat : « Où est le minimum ? ». Ou bien le cas échéant : « Curieux que tout le monde trouve pareil. Pourquoi ? ». *Ensuite* seulement, on propose un recours à une figure dynamique. Pour $_{gj}$ prendre conscience que de minimum, il n'y en a pas.

Il appartient à chacun de se faire son idée …