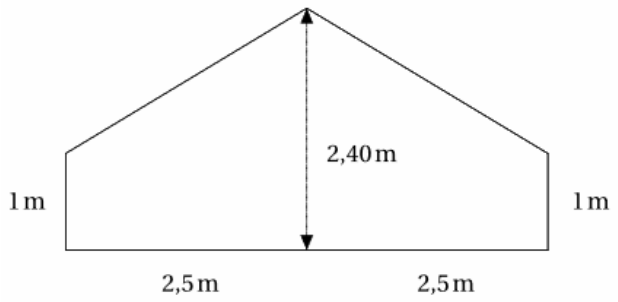
ESD 2016_01 : Géométrie plane

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Un studio sous les toits est mis en location dans une agence immobilière. Au sol, ce studio est un rectangle de 6m de longueur et de 5m de largeur. La coupe transversale de ce studio est donnée ci-contre :



Pour le calcul du loyer, une loi, appelée loi Carrez, détermine la superficie au sol habitable en ne prenant en compte que l'aire des pièces dont la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80m. Calculer, en m^2, la « superficie loi Carrez » de ce studio.

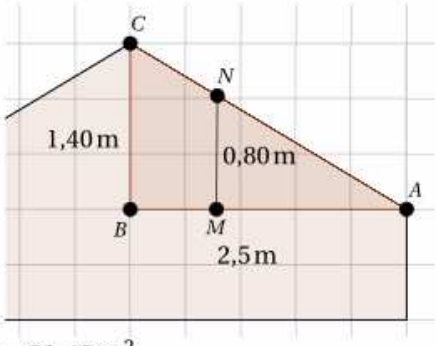
B. Les réponses proposées par deux élèves de troisième

Élève 1

Comme 1,80 m *c'est les* $\frac{3}{4}$ *de* 2,40 m, *je calcule les* $\frac{3}{4}$ *de* 2,50 m *grâce à la propriété de proportionnalité des longueurs. On a donc* $2{,}5 \times \frac{3}{4} = 1{,}875$ m.
On doit donc se placer à 1,875 m *du mur de* 1 m *pour avoir* 1,80 m *sous le plafond. Il reste donc en largeur :* $5 - 2 \times 1{,}875 = 1{,}25$ m.
La superficie « loi Carrez » est donc : $1{,}25 \times 6 = 7{,}50\,\text{m}^2$.

Élève 2

Je me place dans le triangle ABC.
$\tan \widehat{BAC} = \frac{1{,}4}{2{,}5} = 0{,}56$. *Donc* $\widehat{BAC} = 29{,}2°$.
On obtient alors $\tan \widehat{BAC} = \frac{MN}{AM}$.
Donc $AM = \frac{0{,}8}{\tan 29{,}2°} \approx 1{,}43$ m.



La superficie « loi Carrez » du studio est donc : $6 \times (5 - 1{,}43) = 21{,}42\,\text{m}^2$.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites, les compétences développées par chacun et leurs éventuelles erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un authentique problème de recherche permettant un réinvestissement de connaissances.
On en reconnaît des caractéristiques spécifiques :

- La situation proposée est une situation concrète et contextualisée.
- Les informations utiles doivent être extraites tantôt du texte d'énoncé tantôt du schéma (il faut croiser les deux sources d'information).
- Aucune démarche n'est guidée ni même suggérée.
- La réponse n'est pas immédiate (il est d'ailleurs impossible de la « deviner ») et nécessite l'obtention préalable de résultats intermédiaires non demandés explicitement par l'énoncé.

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire en effet d'élaborer une stratégie de résolution : organiser l'information, hiérarchiser les résultats intermédiaires qui apparaissent utiles, identifier les outils mathématiques qui permettront de les obtenir, éventuellement compléter le schéma par des constructions auxiliaires. En un mot, cet exercice favorise la « prise d'initiative ».

1. Analyse des travaux d'élèves.
Les élèves ont tous deux une bonne compréhension de la situation (à classer dans les « réussites »). Ils identifient le même paramètre à déterminer utile à la résolution (la distance du mur au bord de la zone habitable $_{gj\,2016}$).
Les deux élèves se distinguent par l'outil mathématique qui leur paraît le plus opportun pour déterminer ce paramètre et par la qualité de leur démarche.

Elève 1.
Réponse incorrecte.
Cet élève met en place un raisonnement de proportionnalité.
Il fait référence à un théorème portant sur une configuration de Thalès : « Si une droite est parallèle à un côté d'un *triangle*, alors les deux *triangles* formés ont des côtés proportionnels », théorème qu'il transforme en un théorème-élève incorrect.
Selon lui en effet, implicitement : « Si une droite est parallèle à un côté d'un trapèze, alors les deux trapèzes formés ont des côtés proportionnels ».
Si l'on fait abstraction du théorème incorrect, le résultat final qu'il obtient est cohérent avec son résultat intermédiaire.

Ainsi, cet élève a su analyser le problème puis s'engager dans une démarche et développer une argumentation. Il n'a pas su utiliser à bon escient la notion mathématique qui lui paraissait adéquate.

En remédiation, on peut lui proposer de faire une figure à l'échelle de la zone habitable et de celle qui ne l'est pas. Sur du papier quadrillé à gros carreaux, comme le fait l'élève 2, cela ne devrait pas prendre beaucoup de temps et il devrait se rendre compte que la hauteur 1,80m n'est pas là où il le dit. Après seulement, on peut $_{gj\,2016}$ revenir sur le théorème incorrect qu'il a appliqué.

Elève 2.
Réponse incorrecte mais sa production est intéressante à plusieurs égards.
Cet élève choisit l'outil de la trigonométrie.
Il a reproduit le schéma sur papier quadrillé et il a *transformé le schéma en une figure de géométrie* en le codant et en y faisant des constructions auxiliaires, ce qui est une avancée capitale. Désormais, il peut raisonner dans un triangle qui porte un nom, le triangle *ABC*, contrairement à l'élève 1 qui ne raisonne que sur le schéma.
Le calcul de *AM* est correct. On ne peut guère lui reprocher d'avoir calculé inutilement avec des valeurs approchées (la mesure de l'angle approchée 29,2 degrés n'était pas utile) car cela n'a pas d'incidence sur le résultat final (lui-même approché).
L'élève commet l'erreur de ne compter qu'une seule zone non habitable et non deux zones symétriques.

Son erreur peut être provoquée par le fait qu'il ne reproduit que partiellement le schéma de l'énoncé (il faudrait lui proposer de le compléter et lui demander ce que représente, sur sa figure, $5-1{,}43$).

Il n'est cependant pas impossible que son erreur soit induite par le choix de la situation, une demi zone habitable de largeur 1,07m lui paraissant peut-être (à juste titre …) peu vraisemblable.
Objectivement, il faut bien reconnaître que son résultat est plus plausible que le résultat correct.

Ainsi cet élève a su modéliser la situation en la traduisant par une configuration géométrique et choisir un outil bien adapté à la résolution.

2. Les productions des deux élèves peuvent être exploitées pour servir de support à une correction.
On s'intéresse d'abord à la production de l'élève 1 : faire énoncer le théorème sous-jacent à la « propriété de proportionnalité des longueurs » et replacer cette propriété dans son contexte correct (configuration de Thalès). On insistera sur la nécessité, dans l'application d'un théorème, d'en vérifier toutes les hypothèses.

On pourra conclure : « Il nous faut un triangle … ».

Pour en trouver un, deux solutions : ou bien prolonger la ligne du toit et celle du sol jusqu'à leur intersection, ou bien exploiter la figure de l'élève 2, ce qui apparaît clairement comme la meilleure option. On soulignera l'avantage de coder et de compléter le schéma (il perd son statut de schéma et acquiert un nouveau statut, celui d'une figure géométrique).

On raisonne désormais sur la figure de l'élève 2.

On comparera les deux façons de raisonner (élève 1 et élève 2) :

- La « propriété de proportionnalité des longueurs » amène à la proportion : $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ [1].
- L'expression de deux façons de la tangente de l'angle de sommet A amène à la proportion : $\frac{MN}{AM}=\frac{BC}{AB}$ [2]

On obtient dans les deux cas : $AM=\frac{10}{7}=1{,}43$ à 0,01 près.

En conséquence, la superficie « loi Carrez » est égale à $6\times 2\times\left(2{,}5-\frac{10}{7}\right)=\frac{90}{7}$ = 12,86 m^2 à 0,01m^2 près.

En arrondissant au mètre carré le plus proche, la superficie habitable de ce studio est 13 m^2.

3. Voir REDCM pages 190 à 202.

3. Commentaire

Les intentions sont louables dans cet exercice. On peut cependant regretter dans cette situation une certaine invraisemblance dans le choix des données. Le choix d'un toit à double pente fait perdre 1,43m de part et d'autre et laisse seulement 2,14m de largeur habitable au milieu, à peine plus qu'un camping-car. Ce n'est pas très judicieux, comme semble le penser l'élève 2. Il n'est pas interdit à un candidat d'émettre une réserve à propos de ce choix.

Ce studio est-il une ancienne chambre de bonne d'un immeuble parisien du XIXème siècle ? Chacun sait que les soubrettes de l'époque étaient statistiquement de plus petite taille que les étudiants du XXIème siècle …

D'autre part, il me semble que la loi Carrez ne s'applique pas aux locations (?).

[1] *AM* est proportionnel à *AB* et le coefficient de proportionnalité est 0,8/1,4
[2] *AM* est proportionnel à *MN* et le coefficient de proportionnalité est 2,5/1,4