Concours général 2016, problème 2 : Sommes de cubes

Eléments de correction

1. $2016 = 12^3 + 6^3 + 4^3 + 2^3$

2.1 Soit f le fonction définie sur $[5\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2(2x-1)^3 - (2x+1)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 6x - 3$.
La fonction dérivée de f est : $f'(x) = 24x^2 - 72x + 6 = 24x(x-3) + 6$. Elle est clairement strictement positive sur $[5\,;+\infty[$. La fonction f est une fonction strictement croissante sur $[5\,;+\infty[$
De plus : $f(5) = 127$. Par conséquent, $(\forall x \geq 5) : (f(x) \geq f(5) > 0)$.
Quel que soit x appartenant à $[5\,;+\infty[$: $2(2x-1)^3 > (2x+1)^3$

2.2. Soit à démontrer que pour tout couple d'entiers (p, k) tels que $p \geq k \geq 5$: $(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{j=p} (2j-1)^3$. On fixe un entier $k \geq 5$ et on enclenche une récurrence sur p.
La question **2.1** initialise cette inégalité au rang k puisqu'elle établit que lorsque $p = k$:

$$(2p+1)^3 \leq 2(2p-1)^3 = (2p-1)^3 + (2p-1)^3 = (2p-1)^3 + \sum_{j=p}^{p} (2j-1)^3 .$$

Hérédité : Supposons que pour un entier $p \geq k \geq 5$: $(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{j=p} (2j-1)^3$.

Pour l'entier suivant $(p+1)$:

$$(2(p+1)+1)^3 \leq 2(2(p+1)-1)^3 = 2(2p+1)^3 \leq (2p+1)^3 + \left((2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{j=p} (2j-1)^3\right).$$

On obtient : $(2(p+1)+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{j=p+1} (2j-1)^3$ ce qui démontre la propriété d'hérédité de l'inégalité.

Cette inégalité est établie pour tout couple d'entiers (p, k) tels que $p \geq k \geq 5$.

3. La liste **s** que j'ai obtenue à l'aide d'un programme est :

{1, 3746, 7203, 35140, 49253, 16998, 5767, 5768, 7785, 9514, 12683, 18444, 22765, 28526, 28527, 1456, 881, 882, 2323, 4628, 6645, 18166, 21911, 19032, 12697, 12698, 27, 28, 7229, 7230, 35167, 51584, 6369, 5794, 5795, 7236, 8101, 11558, 19047, 22792, 28553, 28554, 1483, 1484, 1197, 1198, 2927, 6672, 10129, 21938, 19635, 15028, 13013, 13014, 343, 344, 27705, 34042, 44123, 6396, 6397, 4382, 4383, 7840, 11585, 15042, 25411, 29156, 24837, 21958, 1799, 1224, 1225, 2666, 10155, 10156, 63149, 15630, 9295, 9296, 13041, 370, 371, 28308, 34069, 38390, 13623, 5560, 4409, 4410, 6427, 11612, 13629, 19390, 31199, 24864, 24865, 1826, 1827, 2404, 2693, 3270, 12775, 18536, 10473, 9322, 9323, 11340, 16525, 18542, 24303, 34672, 38417, 13650, 5587, 5588, 4725, 4726, 8183, 13656, 19417, 25754, 27195, 18556, 125, 126, 2431, 3296, 3297, 12802, 18563, 10500, 10501, 9638, 9639, 14824, 18569, 22890, 30667, 40748, 34125, 5038, 5039, 4752, 4753, 6770, 12531, 22036, 25781, 19734, 18583, 152, 153, 730, 3899, 5916, 50557, 56318, 17727, 10816, 9665, 9666, 11683, 17444, 22917, 29254, 35015, 38760, 2185, 2186, 3051, 3052, 6797, 10254, 18895, 22640, 19761, 19762, 1331, 468, 469, 2198, 5943, 9400, 56633, 7098, 7099, 7964, 7965, 11710, 15167, 23808, 29281, 35042, 30723, 2212, 2213, 3078, 3079, 7976, 10281, 18922, 22667, 22668, 20077, 1358, 495, 496, 1073, 9426, 9427, 52916, 7125, 7126, 7991, 7992, 12313, 15194, 19515, 28156, 31901, 30750, 4831, 2528, 2529, 3394, 3395, 11460, 18661, 30758, 16359, 16360, 17225, 1674, 1099, 1100, 2541, 38542, 52943, 9744, 7441, 7442, 8307, 8308, 16373, 19542, 25879, 31928, 31929, 4858, 2555, 2556, 3421, 3422, 11487, 13504, 19265, 16386, 16387, 17252, 1701, 1702 , 2567, 2568, 39721, 49226, 9771, 7468, 7469, 7758, 8335, 12656, 18417, 25906, 40019, 32244, 13525, 854, 855, 4024, 4601, 9786, 13531, 19292, 19005, 12670, 12671, 17568}

4. Les entiers $u_1,...,u_n$ étant en progression arithmétique de raison 288 : $u_2 = u_1 + 288$; ... ; $u_n = u_1 + 288(n-1)$

Soit x un entier tel que $m + u_1 \leq x \leq 288n + u_1$.

Il existe un couple d'entiers $(q\ ;\ r)$ tel que $1 \leq r \leq 288$ et $x - u_1 = 288q + r$. (L'entier r coïncide avec le reste de la division euclidienne de $x - u_1$ par 288 , sauf si $x - u_1$ est multiple de 288, auquel cas c'est 288 lui-même alors que le reste euclidien est 0).

Parmi les entiers s_i, il en existe un et un seul qui est congru à r modulo 288, c'est s_r .

On peut écrire : $s_r = 288q' + r$

Ainsi : $x = u_1 + 288(q - q') + s_r$ et l'entier $q - q'$ est d'une part positif puisque $x - u_1 \geq m \geq s_r$ et d'autre part strictement inférieur à n puisque $288(q - q') + s_r \leq 288n$ (on rappelle que $s_r > 0$). L'entier $q - q' + 1$ indexe un terme de la suite $(u_i)_{i=1,...,288}$: $u_{q-q'+1} = u_1 + 288(q - q')$. L'entier x se décompose en la somme suivante : $x = u_{q-q'+1} + s_r$

5.1. On peut citer le cas des entiers 224 , 512 et 800 qui sont tous trois dans S_0. Il existe bien trois entiers de S_0 qui sont en progression arithmétique de raison 288 (et s'il en existe 3, *a fortiori* il en existe 2).

5.2. L'écran ci-contre justifie la relation admise.

$(2\cdot x+12)^3+(2\cdot x+4)^3+(2\cdot x+2)^3 \qquad 24\cdot x^3+216\cdot x^2+984\cdot x+1800$

$(2\cdot x+10)^3+(2\cdot x+8)^3+(2\cdot x)^3 \qquad 24\cdot x^3+216\cdot x^2+984\cdot x+1512$

©gilbertjulia2016

De cette façon, quel que soit l'entier p pair :

$$(p+12)^3 + (p+4)^3 + (p+2)^3 = (p+10)^3 + (p+8)^3 + p^3 + 288 .$$

On note que tous les cubes figurant dans cette relation sont des cubes d'entiers pairs.

Par récurrence sur la longueur de la progression arithmétique :

La question **5.1.** montre qu'il existe dans S_0 une progression arithmétique de raison 288 et de longueur 2.

Supposons construite dans S_0 une progression arithmétique de raison 288 et de longueur n, $(n \geq 2)$ à savoir $u_1,....,u_n$.

Soit p un entier pair strictement supérieur au plus grand des entiers pairs figurant dans une quelconque décomposition de ces éléments.

Alors, les n entiers : $v_k = u_k + (p+10)^3 + (p+8)^3 + p^3$; $k = 1,...,n$ appartiennent à S_0 puisque tous sommes d'entiers pairs distincts et sont eux-mêmes en progression arithmétique de raison 288.

L'entier : $v_{n+1} = u_n + (p+12)^3 + (p+4)^3 + (p+2)^3 = v_n + 288$ est aussi une somme d'entiers pairs distincts et allonge d'une unité la longueur de cette progression arithmétique : celle-ci est de longueur $(n+1)$.

Par exemple, à partir de $u_1 = 224$; $u_2 = 512$, on construit : $v_1 = 224 + 16^3 + 14^3 + 6^3 = 7280$; $v_2 = 512 + 16^3 + 14^3 + 6^3 = 7568$ et on allonge par : $v_3 = 512 + 18^3 + 10^3 + 8^3 = 7856$

Quel que soit n $(n \geq 2)$, il existe une dans S_0 une progression arithmétique de raison 288 et de longueur n.

6.1. Vu que $m = 63149$, on peut choisir pour k l'entier 20.
Pour cet entier en effet, $2k+1 = 41$ et $(2k+1)^3 = 68921 > 63149$ et $2(2k-1)^3 = 2.39^3 = 118638$.

L'entier 632 quant à lui vérifie l'inégalité : $632 \times 288 = 182016 > 63149 + 2.39^3$.

D'après la question **5.2.** il existe dans S_0 une suite de 632 entiers en progression arithmétique de raison 288 : $\{u_1, u_2, ..., u_{632}\}$

D'après la question **4**, tout entier de l'intervalle $[63149 + u_1 \ ; 288 \times 632 + u_1]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u_j$ somme d'un entier de S_1 et d'un entier de S_0.
Si on pose : $N = 63149 + u_1$ on obtient que tout entier de l'intervalle $[N \ ; N + 118867]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u_j$ somme d'un entier de S_1 et d'un entier de S_0. Il en est donc ainsi de tout entier de l'intervalle $[N \ ; N + 118638]$, intervalle contenu dans le précédent. Tout entier de cet intervalle appartient à S.
On note que l'élément de S_1 figurant dans la décomposition est une somme de cubes d'entiers impairs distincts inférieurs ou égaux à 29.

6.2. Si on pose : $N_p = N + 39^3 + \sum_{j=20}^{j=p} (2j-1)^3$ on construit successivement les entiers :

$N_{20} = N + 118638$; $N_{21} = N + 187559 = N_{20} + 41^3$; $N_{22} = N + 267066 = N_{21} + 43^3$; $N + 358191$; ..... …

D'après **6.1**, tout entier de $[N \ ; N_{20}]$ appartient à S.
Tout entier x de $[N_{20} \ ; N_{21}]$ est tel que : $N + 49717 \leq x - 41^3 \leq N + 187559 - 41^3 = N + 118638 = N_{20}$. Il est somme de 41^3 (cube d'un nouvel entier impair) et d'un élément de $[N \ ; N_{20}]$, il appartient à S.

Tout entier x de $[N_{21} \ ; N_{22}]$ est tel que : $N + 108052 \leq x - 43^3 \leq N + 267066 - 43^3 = N_{21}$ est somme de 43^3 (cube d'un nouvel entier impair) et d'un élément de $[N \ ; N_{21}]$, il appartient à S.

Tout entier x de $[N_{22} \ ; N_{23}]$ est tel que : $N + 267066 \leq x - 45^3 \leq N_{22}$ est somme de 45^3 et d'un élément de $[N \ ; N_{22}]$, il appartient à S.

Tout entier x de $[N_p \ ; N_{p+1}]$ est tel que : $N_p - (2p+1)^3 \leq x - (2p+1)^3 \leq N_p$, de façon générale.
Or : $N_p - (2p+1)^3 = N + 2(2p-1)^3 - (2p-1)^3 + \sum_{j=20}^{p-1} (2j-1)^3 \geq N$. Tout entier x de $[N_p \ ; N_{p+1}]$ est somme de $(2p+1)^3$ et d'un élément de $[N \ ; N_p]$, il appartient à S.
La suite (N_p) étant une suite d'entiers strictement croissante, $\lim_{p \mapsto} N_p = +\infty$: de proche en proche, on construit une suite d'intervalles $[N \ ; N_p]$ emboîtés ne contenant que des éléments de S et recouvrant l'ensemble des entiers supérieurs à N.